ALGEBRAS GROUPS AND GEOMETRIES 35 243 -265 (2018)

DOI 10.29083/AGG.35.03.2018

ZUR THEORIE DER q, ω-LIESCHEN MATRIXGRUPPEN

Thomas Ernst
Department of Mathematics, Uppsala University
P.O. Box 480, SE-751 06 Uppsala, Sweden
thomas@math.uu.se

Received April 29, 2019

Abstract

Based on the three papers by Hahn 1949, Annaby et. al. 2012 and Varma et. al. 2018, we introduce the matrix of multiplicative q, ω-polynomials of order $M \in \mathbb{Z}$ with the corresponding q-addition. We prove that this constitutes a so-called q, ω-Lie group with two dual q, ω-multiplications. We also show that the corresponding q, ω-Bernoulli and q, ω-Euler matrices form q, ω-Lie subgroups. In the limit $\omega \to 0$ we obtain corresponding formulas for q-Appell polynomial matrices.

Primary 17B37; Secondary 11B68, 33D15

Keywords— q, ω-Lie group; multiplicative q-Appell polynomial matrix; Hahn–Pascal matrix

ZUSAMMENFASSUNG. Basierend auf den drei Veröffentlichungen von Hahn 1949, Annaby et. al. 2012 und Varma et. al. 2018, führen wir die multiplikative q, ω-Polynommatrix der Ordnung $M \in \mathbb{Z}$ ein, mit der entsprechenden q-Addition. Wir beweisen, dass dies eine sogenannte q, ω-Liesche Gruppe mit zwei dualen q, ω-Multiplikationen darstellt. Wir zeigen auch, dass die entsprechenden q, ω-Bernoulli und q, ω-Euler Matrizen q, ω-Liesche Untergruppen bilden. Im Grenzwert $\omega \to 0$ erhalten wir entsprechende Formeln für q-Appell-Polynommatrizen.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einführung

Wir stellen einige neue Konzepte für q, ω Polynommatrizen vor, von denen einige vorher nur im q-Fall aus den Artikeln des Autors bekannt waren. Durch die logarithmische Methode für q-Analysis erfolgt dieser Übergang fast automatisch, weil die Addition durch die q, ω-Addition ersetzt wird. In dem Artikel [8] wurden Matrixgruppen mit zwei dualen Multiplikationen eingeführt. Später in [10] wurde bewiesen, dass die sogenannte q-Appell-Polynommatrix-Gruppe ein erstes konkretes Beispiel von q-Lie-Gruppen war. Obwohl wir die q, ω-Addition verwenden, werden die q-Binomialkoeffizienten beibehalten. Stattdessen wird die Potenz von x zu den zwei Hauptfolgen geändert.

In diesem Artikel werden die vorherigen Formeln mit q-Pascal-Matrizen einfach zu sogenannten q, ω-Pascal-Matrizen erweitert. Summenformeln mit der neuen q, ω-Addition können dabei in Matrixform umgeschrieben werden.

Dieser Artikel ist wie folgt organisiert: Im Abschnitt 1 werden die Hauptdefinitionen angegeben.

Der Hauptzweck des Abschnitts 2 ist die Einführung der q, ω-Addition und der multiplikativen q, ω-Appellschen Polynome und Zahlen. Das Umbral-Kalkül wird immer implizit angenommen. Im Abschnitt 3 werden die relevanten Matrizen und die Hauptmatrix q, ω-Differenzengleichung eingeführt. Im Unterabschnitt 3.1 werden die multiplikativen q, ω-Polynommatrizen zur Vorbereitung für die q, ω-Liesche Gruppe, den Hauptzweck dieses Artikels, eingeführt.

Im Unterabschnitt 3.2 wiederholen wir zunächst die Matrixformen der q, ω-Bernoulli und q, ω-Eulerschen Polynome aus [9] zur Vorbereitung für die Berechnung ihrer Zahleninverse.

Sei $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$. Man setze $\omega_0 \equiv \frac{\omega}{1-q}$, $0 < q < 1$. Sei I ein Intervall, das ω_0 enthält. Wir gehen davon aus, dass die Variable x zu I gehört.

Definition 1. Der Endomorphismus ϵ im Vektorraum der Polynome wird definiert durch

$$\epsilon f(x) \equiv f(qx + \omega). \tag{1}$$

Dieser Endomorphismus ist eine Verallgemeinerung des Operators mit demselben Namen im q-Kalkül [5]. In [3, S. 136] ist bewiesen, dass

$$\epsilon^k f(x) = f(q^k x + \omega\{k\}_q), \; k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Definition 2. [11] Sei φ eine stetige reelle Funktion von x. Wir definieren den q,ω-Differenzenoperator $\mathrm{D}_{q,\omega}$ wie folgt:

$$\mathrm{D}_{q,\omega}\left(\varphi\right)(x) \equiv \begin{cases} \frac{\varphi(qx+\omega)-\varphi(x)}{(q-1)x+\omega}, & \text{if } x \neq \omega_0; \\ \frac{d\varphi}{dx}(x) & \text{if } x = \omega_0. \end{cases} \tag{3}$$

Eine Funktion $f(x)$ ist n Mal q,ω-differenzierbar, wenn $\mathrm{D}^n_{q,\omega} f(x)$ vorhanden ist. Wenn wir darauf hinweisen möchten, dass dieser Operator auf der Variable x operiert, werden wir $\mathrm{D}_{q,\omega,x}$ für den Operator schreiben. Weiterhin, $\mathrm{D}_{q,\omega}(K) = 0$, wie für die Ableitung.

Dieser Operator interpoliert zwischen zwei bekannten Operatoren, dem Nørlundschen Differenzenoperator

$$\triangle_\omega[f(x)] \equiv \frac{f(x+\omega)-f(x)}{\omega}, \tag{4}$$

und der Jacksonschen q-Ableitung

$$\left(\mathrm{D}_q\varphi\right)(x) \equiv \begin{cases} \frac{\varphi(x)-\varphi(qx)}{(1-q)x}, & \text{if } q \in \mathbb{C}\backslash\{1\}, \; x \neq 0; \\ \frac{d\varphi}{dx}(x) & \text{if } q = 1; \end{cases} \tag{5}$$

Die folgende Definition erscheint zum ersten Mal.

Definition 3. Ein q,ω-Analogon des mathematischen Objekts G ist eine mathematische Funktion $F(q,\omega)$ mit der Eigenschaft $\lim_{\omega\to 0} F(q,\omega) = G_q$, das q-Analogon von G. Sowohl F als auch G können Funktionen von mehreren Variablen sein. Sie können auch Operatoren sein. Die Funktion $F(q,\omega)$ wird ω-Analogon von G_q genannt.

Satz 1.1. [3, (16), S. 137] *Der q,ω-Differenzenoperator für ein Produkt von Funktionen.*

$$\mathrm{D}_{q,\omega}\left(fg\right)(x) = \mathrm{D}_{q,\omega}\left(f\right)(x) g(x) + f(qx+\omega)\mathrm{D}_{q,\omega}\left(g\right)(x). \tag{6}$$

Bemerkung 1. Diese Formel wird zum Nachweis von (28) verwendet.

Wir führen nun zwei Hauptfolgen ein, die die Ciglerschen Polynome in [5, 5.5] verallgemeinern.

Definition 4.

(7) $$[13,\ (15)]\ [x]_{q,\omega}^{k} \equiv \prod_{m=0}^{k-1} (q^m x + \omega\{m\}_q).$$

(8) $$[13,\ (16)]\ (x)_{q,\omega}^{k} \equiv \prod_{m=0}^{k-1} (x - \omega\{m\}_q),$$

wobei $\{m\}_q$ das q-Analogon von m bezeichnet.

Die beiden folgenden Formeln entsprechen der Formel $\mathrm{D}x^n = nx^{n-1}$:

(9) $$[12,\ 2.5],\ [13,\ (17)]\ \mathrm{D}_{q,\omega}(x)_{q,\omega}^{n} = \{n\}_q (x)_{q,\omega}^{n-1}.$$

(10) $$[13,\ (18)]\ \mathrm{D}_{q,\omega}[x]_{q,\omega}^{n} = \{n\}_q [qx+\omega]_{q,\omega}^{n-1}.$$

Als nächstes führen wir zwei q,ω-Analoga der Exponentialfunktion ein:

Definition 5. Die q,ω-Exponentialfunktion $\mathrm{E}_{q,\omega}(z)$ [13, (21)] wird definiert durch

(11) $$\mathrm{E}_{q,\omega}(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z)_{q,\omega}^{k}}{\{k\}_q!},\ |(1-q)z-\omega| < 1.$$

Die komplementäre q,ω-Exponentialfunktion $\mathrm{E}_{\frac{1}{q},\omega}(z)$ [13, (26)] wird definiert durch

(12) $$\mathrm{E}_{\frac{1}{q},\omega}(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[z]_{q,\omega}^{k}}{\{k\}_q!},\ |\omega| < 1.$$

Wir haben den Namen geändert zu $\mathrm{E}_{\frac{1}{q},\omega}(z)$, weil $\mathrm{E}_{\frac{1}{q},0}(z) = \mathrm{E}_{\frac{1}{q}}(z)$ [5].

Satz 1.2. [13, (19)] *Die q,ω-Exponentialfunktion ist die einzigartige Lösung der q,ω-Differenzengleichung*

(13) $$\mathrm{D}_{q,\omega} f(z) = f(z),\ f(0) = 1.$$

[13, (24)] *Die komplementäre q,ω-Exponentialfunktion ist die einzigartige Lösung der q,ω-Differenzengleichung*

(14) $$\mathrm{D}_{q,\omega} f(z) = f(qz+\omega),\ f(0) = 1.$$

Satz 1.3. [13, (21)] *Die meromorphe Fortsetzung der q,ω-Exponentialfunktion* $\mathrm{E}_{q,\omega}(z)$ *ist gegeben durch*

$$\mathrm{E}_{q,\omega}(z) = \frac{(-\omega;q)_\infty}{((1-q)z-\omega;q)_\infty}. \tag{15}$$

[13, (26)] *Die meromorphe Fortsetzung der komplementären q,ω-Exponentialfunktion* $\mathrm{E}_{\frac{1}{q},\omega}(z)$ *ist gegeben durch*

$$\mathrm{E}_{\frac{1}{q},\omega}(z) = \frac{((q-1)z+\omega;q)_\infty}{(\omega;q)_\infty}. \tag{16}$$

Korollarium 1.4.

$$\mathrm{E}_{q,\omega}(z)\mathrm{E}_{\frac{1}{q},-\omega}(-z) = 1 \tag{17}$$

2. Die q,ω-Liesche Gruppe von q,ω-Appellschen Polynommatrizen

Wir erweitern zunächst einige Definitionen von [8].

Definition 6. Eine q,ω-Liesche Gruppe $(G_{n,q,\omega,\cdot,\cdot_{q,\omega}}, \mathrm{I}_g) \supseteq \mathrm{E}_{q,\omega}(\mathfrak{g}_q)$ ist eine möglicherweise unendliche Menge von Matrizen $\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ und eine Mannigfaltigkeit mit zwei Multiplikationen: $\cdot$, der üblichen Matrixmultiplikation und der verdrehten Matrixmultiplikation $\cdot_{q,\omega}$, die separat definiert wird.

Jede q,ω-Liesche Gruppe hat eine Einheit, die für beide Multiplikationen mit I_g bezeichnet wird. Jedes Element $\Phi \in G_{n,q,\omega}$ hat eine Inverse Φ^{-1} mit der Eigenschaft $\Phi \cdot_{q,\omega} \Phi^{-1} = \mathrm{I}_g$.

Definition 7. Angenommen, $(G_1, \cdot_1, \cdot_{1:q,\omega})$ und $(G_2, \cdot_2, \cdot_{2:q,\omega})$ sind zwei q,ω-Liesche Gruppen, dann ist $(G_1 \times G_2, \cdot, \cdot_{q,\omega})$ eine q,ω-Liesche Gruppe mit dem Namen Produkt-q,ω-Liesche Gruppe. Diese Gruppe hat Gruppenoperationen definiert durch

$$(g_{11}, g_{21}) \cdot (g_{12}, g_{22}) = (g_{11} \cdot_1 g_{12}, g_{21} \cdot_2 g_{22}), \tag{18}$$

und

$$(g_{11}, g_{21}) \cdot_{q,\omega} (g_{12}, g_{22}) = (g_{11} \cdot_{1:q,\omega} g_{12}, g_{21} \cdot_{2:q,\omega} g_{22}). \tag{19}$$

Definition 8. Wenn $(G_{n,q,\omega}, \cdot, \cdot_{q,\omega})$ eine q,ω-Liesche Gruppe ist und $H_{n,q,\omega}$ eine nichtleere Teilmenge von $G_{n,q,\omega}$ ist, dann wird $(H_{n,q,\omega}, \cdot, \cdot_{q,\omega})$ eine q,ω-Liesche Untergruppe von $(G_{n,q,\omega}, \cdot, \cdot_{q,\omega})$ genannt, falls

(1)

(20) $\Phi \cdot \Psi \in H_{n,q,\omega}$ und $\Phi \cdot_{q,\omega} \Psi \in H_{n,q,\omega}$ for all $\Phi, \Psi \in H_{n,q,\omega}$.

(2)

(21) $$\Phi^{-1} \in H_{n,q,\omega} \text{ for all } \Phi \in H_{n,q,\omega}.$$

(3) $H_{n,q,\omega}$ eine Untermannigfaltigkeit von $G_{n,q,\omega}$ ist.

Um die folgenden Polynome verwenden zu können, müssen wir die q-Addition verallgemeinern. Die gewöhnliche q-Addition ist der Sonderfall $\omega = 0$. Genau wie bei der q-Addition verwenden wir Buchstaben in einem Alphabet für die q, ω-Additionen. Die Gleichheit der Buchstaben wird mit $\sim$ bezeichnet. Man beachte im Folgenden die Tatsache, dass jeweils die Variable x in $(x)^{\nu}_{q,\omega}$ oder in $[x]^{\nu}_{q,\omega}$ durch die Konstante a multipliziert wird, müssen wir auch ω mit a multiplizieren.

Definition 9. Die NWA q, ω-Addition wird wie folgt definiert:

(22) $$(x \oplus_{q,\omega} y)^n \equiv \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q (x)^{n-k}_{q,\omega} (y)^k_{q,\omega}.$$

Die NWA q, ω-Subtraktion wird wie folgt definiert:

(23) $$(x \ominus_{q,\omega} y)^n \equiv \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q (x)^{n-k}_{q,\omega} (-y)^k_{q,-\omega}.$$

Die JHC q, ω-Addition wird wie folgt definiert:

(24) $$(x \boxplus_{q,\omega} y)^n \equiv \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q (x)^{n-k}_{q,\omega} [y]^k_{q,\omega}.$$

Die JHC q, ω-Subtraktion wird wie folgt definiert:

(25) $$(x \boxminus_{q,\omega} y)^n \equiv \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q (x)^{n-k}_{q,\omega} [-y]^k_{q,-\omega}.$$

Korollarium 2.1. *Eine Erweiterung der Formel* [5, 4.29]

(26) $$\mathrm{D}_{q,\omega,x}(x \oplus_{q,\omega} y)^n = \{n\}_q (x \oplus_{q,\omega} y)^{n-1}, \quad \oplus_{q,\omega} \equiv \oplus_{q,\omega} \vee \boxplus_{q,\omega}.$$

Beweis.

$$(27) \qquad \mathrm{D}_{q,\omega,x}(x \oplus_{q,\omega} y)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}_q \{n-k\}_q (x)_{q,\omega}^{n-k-1} (y)_{q,\omega}^k = \mathrm{RS}.$$

□

Satz 2.2. *Die Kettenregel für den q,ω-Differenzenoperator.*

$$(28) \qquad \mathrm{D}_{q,\omega}\left((ax)_{q,a\omega}^n\right) = a\{n\}_q (ax)_{q,a\omega}^{n-1}.$$

$$(29) \qquad \mathrm{D}_{q,\omega}\left([ax]_{q,a\omega}^n\right) = a\{n\}_q [aqx + a\omega]_{q,a\omega}^{n-1}.$$

Beweis. Wir beweisen (28) durch Induktion. Die Formel (28) gilt für $n = 1, 2$. Angenommen, sie gilt für $n-1$. Dann haben wir

$$\mathrm{D}_{q,\omega}\left[(ax)_{q,a\omega}^{n-1}(ax - \{n-1\}_q a\omega)\right]$$

$$(30) \qquad \stackrel{\text{durch}(6)}{=} a(ax)_{q,a\omega}^{n-1} + a^2\left[qx + \omega - \{n-1\}_q\right]\{n-1\}_q (ax)_{q,a\omega}^{n-2}$$

$$= a(ax)_{q,a\omega}^{n-1}\left[1 + q\{n-1\}_q\right] = \mathrm{RS}.$$

Die Formel (29) wird in ähnlicher Weise bewiesen. □

Korollarium 2.3. *Vier q,ω-Additionen für die q,ω-Exponentialfunktion.*

$$(31) \qquad \mathrm{E}_{q,\omega}(x \oplus_{q,\omega} y) \equiv \mathrm{E}_{q,\omega}(x)\mathrm{E}_{q,\omega}(y).$$

$$(32) \qquad \mathrm{E}_{q,\omega}(x \ominus_{q,\omega} y) \equiv \mathrm{E}_{q,\omega}(x)\mathrm{E}_{q,-\omega}(-y).$$

$$(33) \qquad \mathrm{E}_{q,\omega}(x \boxplus_{q,\omega} y) \equiv \mathrm{E}_{q,\omega}(x)\mathrm{E}_{\frac{1}{q},\omega}(y).$$

$$(34) \qquad \mathrm{E}_{q,\omega}(x \boxminus_{q,\omega} y) \equiv \mathrm{E}_{q,\omega}(x)\mathrm{E}_{\frac{1}{q},-\omega}(-y).$$

Beweis. Man verwende die Formeln (22) und (24). □

Satz 2.4. *Die q,ω-Differenzen für die q,ω-Exponentialfunktionen sind:*

$$(35) \qquad \mathrm{D}_{q,\omega}\, \mathrm{E}_{q,a\omega}(ax) = a\, \mathrm{E}_{q,a\omega}(ax),$$

$$(36) \qquad \mathrm{D}_{q,\omega}\, \mathrm{E}_{\frac{1}{q},a\omega}(ax) = a\, \mathrm{E}_{\frac{1}{q},a\omega}(aqx + a\omega),$$

Beweis. Dies ergibt sich aus der Kettenregel (28) und (29). □

Satz 2.5. *Die NWA q,ω-Addition ist kommutativ und assoziativ.*

Beweis. Ähnlich dem Nachweis für NWA q-Addition. □

Satz 2.6. *Die JHC q,ω-Addition ist assoziativ. Wir nehmen an, dass alle JHC q,ω-Additionen ganz rechts im Funktionsargument stehen.*

Beweis. Dies ergibt sich aus der Assoziativität der Multiplikation. □

Definition 10. Die Ward-ω-Zahl $\overline{n}_{q,\omega}$ wird definiert durch

$$\overline{n}_{q,\omega} \sim 1 \oplus_{q,\omega} 1 \oplus_{q,\omega} \dots \oplus_{q,\omega} 1, \tag{37}$$

wobei die Anzahl der Summanden auf der rechten Seite n ist.

Definition 11. Die Jacksonsche ω-Zahl $\tilde{n}_{q,\omega}$ wird definiert durch

$$\tilde{n}_{q,\omega} \sim 1 \boxplus_{q,\omega} 1 \boxplus_{q,\omega} \dots \boxplus_{q,\omega} 1, \tag{38}$$

wobei die Anzahl der Summanden auf der rechten Seite n ist.

Die allgemeinste Form von Polynom in diesem Artikel ist das q,ω-Appell-Polynom, das wir nun definieren werden.

Definition 12. Sei $\mathcal{A}_{q,\omega}$ die reelle Zahlenfolgen $\{u_{\nu,q}\}_{\nu=0}^{\infty}$, so dass

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |u_{\nu,q}| \frac{r^{\nu}}{\{\nu\}_q!} < \infty, \tag{39}$$

für einen q,ω-abhängiger Konvergenzradius $r = r(q) > 0$, wobei $0 < q < 1$.

Die q,ω-Appellsche Zahlenfolge wird mit $\{\Phi_{\nu,q,\omega}^{(n)}\}_{\nu=0}^{\infty}$ bezeichnet.

Definition 13. Sei $h(t,q,\omega)$, $h(t,q,\omega)^{-1} \in \mathbb{R}[[t]]$. Für $f_n(t,q,\omega) = h(t,q,\omega)^n$ werden die multiplikativen q,ω-Appellschen Zahlen von Grad ν und Ordnung n, $\Phi_{\nu,q,\omega} \in \mathcal{A}_{q,\omega}$ durch die folgende erzeugende Funktion gegeben:

$$f_n(t,q,\omega) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\{\nu\}_q!} \Phi_{\nu,q,\omega}^{(n)}, \quad \Phi_{0,q,\omega}^{(n)} = 1. \tag{40}$$

Der Bequemlichkeit halber fixieren wir den Wert für $n = 0$ und $n = 1$:

$$\Phi_{\nu,q,\omega}^{(0)} \equiv \delta_{0,\nu}, \quad \Phi_{\nu,q,\omega}^{(1)} \equiv \Phi_{\nu,q,\omega}. \tag{41}$$

Definition 14. Man vergleiche mit [13, (31)]. Für $f_n(t,q,\omega) \in \mathbb{R}[[t]]$ wie oben wird die multiplikative q,ω-Appellsche Polynomfolge $\{\Phi_{\nu;q,\omega}^{(n)}(x)\}_{\nu=0}^{\infty}$ von Grad ν und Ordnung n durch die folgende erzeugende Funktion gegeben:

$$f_n(t,q,\omega)\mathrm{E}_{q,\omega t}(xt) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\{\nu\}_q!}\Phi^{(n)}_{\nu;q,\omega}(x). \tag{42}$$

Definition 15. Der Bequemlichkeit halber fixieren wir wieder den Wert für $n = 0$ und $n = 1$:

$$\Phi^{(0)}_{\nu,q,\omega}(x) = (x)^\nu_{q,\omega},\ \Phi^{(1)}_{\nu,q,\omega}(x) \equiv \Phi_{\nu,q,\omega}(x). \tag{43}$$

Motivation: Die erste Definition folgt, weil die zwei Hauptfolgen die Potenzfunktion ersetzen.

Als nächstes werden Verallgemeinerungen der beiden Formeln [5, 4.107, 4.111] vorgestellt.

Satz 2.7.

$$\mathrm{D}_{q,\omega}\Phi_{\nu;q,\omega}(x) = \{\nu\}_q\Phi_{\nu-1;q,\omega}(x). \tag{44}$$

Die Formel [13, (30)] *in Umbralform:*

$$\Phi_{\nu;q,\omega}(x) \doteq (\Phi_{q,\omega} \oplus_{q,\omega} x)^\nu. \tag{45}$$

Definition 16. Man vergleiche mit [13, (31)]. Für $f_n(t,q,\omega) \in \mathbb{R}[[t]]$ wie oben wird die komplementäre q,ω-Appellsche Polynomfolge $\{\Phi^{(n)}_{\nu;\frac{1}{q},\omega}(x)\}_{\nu=0}^{\infty}$ von Grad ν und Ordnung n durch die folgende erzeugende Funktion definiert:

$$f_n(t,q,\omega)\mathrm{E}_{\frac{1}{q},\omega t}(xt) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\{\nu\}_q!}\Phi^{(n)}_{\nu;\frac{1}{q},\omega}(x). \tag{46}$$

Bemerkung 2. Diese Definition wird in der Formel (49) verwendet.

Satz 2.8. *Angenommen, M und K sind die x-Ordnung bzw. y-Ordnung. Dann haben wir ein ω-Analogon von* [10, (43)]*:*

$$\Phi^{(M+K)}_{\nu,q,\omega}(x \oplus_{q,\omega} y) = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k}_q \Phi^{(M)}_{k,q,\omega}(x)\Phi^{(K)}_{\nu-k,q,\omega}(y). \tag{47}$$

Beweis. Wir zeigen, dass beide Seiten von (47) dieselbe erzeugende Funktion haben.

$$f_{M+K}(t,q,\omega)\mathrm{E}_{q,\omega t}((x \oplus_{q,\omega} y)t) \overset{\text{durch}(22)}{=} f_M(t,q,\omega)\mathrm{E}_{q,\omega t}(xt)$$

$$f_K(t,q,\omega)\mathrm{E}_{q,\omega t}(yt) \overset{\text{durch}(42)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\{k\}_q!}\Phi_{k;q,\omega}^{(M)}(x) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{\{l\}_q!}\Phi_{l;q,\omega}^{(K)}(y) \tag{48}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\{\nu\}_q!} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k}_q \Phi_{k,q,\omega}^{(M)}(x)\Phi_{\nu-k,q,\omega}^{(K)}(y).$$

□

Bemerkung 3. Die Formel (47) definiert $\Phi_{\nu,q,\omega}^{(M+K)}(x \oplus_{q,\omega} y)$ als rechte Seite der Formel. Es gibt keine andere Definition von dieser Funktion.

Satz 2.9. *Angenommen, M und K sind die x-Ordnung bzw. y-Ordnung. Dann haben wir:*

$$\Phi_{\nu,q,\omega}^{(M+K)}(x \boxplus_{q,\omega} y) = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k}_q \Phi_{k,q,\omega}^{(M)}(x)\Phi_{\nu-k,\frac{1}{q},\omega}^{(K)}(y). \tag{49}$$

Beweis. Wir zeigen, dass beide Seiten von (49) dieselbe erzeugende Funktion haben.

(50)

$$f_{M+K}(t,q,\omega)\mathrm{E}_{q,\omega t}((x \boxplus_{q,\omega} y)t) \overset{\text{durch}(24)}{=} f_M(t,q,\omega)\mathrm{E}_{q,\omega t}(xt)f_K(t,\tfrac{1}{q},-\omega)$$

$$\mathrm{E}_{\frac{1}{q},\omega t}(yt) \overset{\text{durch}(42),(46)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\{k\}_q!}\Phi_{k;q,\omega}^{(M)}(x) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{\{l\}_q!}\Phi_{l;\frac{1}{q},\omega}^{(K)}(y)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\{\nu\}_q!} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k}_q \Phi_{k,q,\omega}^{(M)}(x)\Phi_{\nu-k,\frac{1}{q},\omega}^{(K)}(y).$$

□

3. Der Matrixansatz

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir Resultate aus [9] und [10] durch die Einführung der Variable ω.

Definition 17. [6], [9] Ein q-Analogon der Polya-Veinschen Matrix. Die $n \times n$ Matrix $\mathbf{D}_{n,q}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{n,q}(i, i-1) &\equiv \{i\}_q, \ i = 1, \ldots, n-1, \\ \mathbf{D}_{n,q}(i, j) &\equiv 0, \ j \neq i-1. \end{aligned} \tag{51}$$

Die folgende Vektorform für q, ω-Appellsche Polynome und Zahlen wird in den Formeln (69), (89), (90), (108) und (109) verwendet.

$$\phi_{n,q,\omega}(x) \equiv (\Phi_{0,q,\omega}(x), \Phi_{1,q,\omega}(x), \ldots, \Phi_{n-1,q,\omega}(x))^T, \tag{52}$$

$$\phi_{n,q,\omega} \equiv \phi_{n,q,\omega}(0). \tag{53}$$

Definition 18. Die folgende Abkürzung wird verwendet.

$$\xi_{n,q,\omega}(x) \equiv ((x)^0_{q,\omega}, (x)^1_{q,\omega}, (x)^2_{q,\omega}, \ldots, (x)^{n-1}_{q,\omega})^T. \tag{54}$$

Definition 19. Man definiere die q, ω-Appellsche Polynommatrix durch

$$\overline{\Phi}_{n,q,\omega}(x)(i, j) \equiv \binom{i}{j}_q \Phi_{i-j,q,\omega}(x), \ 0 \leq i, j \leq n-1. \tag{55}$$

Definition 20. Die q, ω-Appellsche Zahlenmmatrix wird definiert durch

$$\overline{\Phi}_{n,q,\omega}(i, j) \equiv \overline{\Phi}_{n,q,\omega}(0)(i, j), \ 0 \leq i, j \leq n-1. \tag{56}$$

Satz 3.1. *Die Formel (44) kann in Matrixform geschrieben werden. Vergleiche mit* [6, (83)].

$$\mathrm{D}_{q,\omega}\phi_{n,q,\omega}(x) = \mathbf{D}_{n,q}\phi_{n,q,\omega}(x). \tag{57}$$

Angenommen, $y(t)$ ist ein Vektor der Länge n, ist die folgende q, ω-Differenzengleichung in $\mathbb{R}^n$ von grundlegender Bedeutung:

$$\mathrm{D}_{q,\omega}y(t) = \mathbf{D}_{n,q}y(t), y(0) = y_0, \ -\infty < t < \infty. \tag{58}$$

Gemäß der Formel (57), ist die allgemeine Lösung von (58) der q, ω-Appell-Polynomvektor von Grad ν und Ordnung m. Die Anfangswerte sind dann der Vektor von q, ω-Appellschen Zahlen der Ordnung m u.s.w.. Der Anfangswert kann auch die Vektorfunktion e_0 sein. Die Lösung ist dann die Vektorfunktion $\xi_{n,q,\omega}(x)$.

Definition 21. Die q,ω-Pascalsche Matrix $\mathrm{P}_{n,q,\omega}(x)$ ist gegeben durch

$$\mathrm{P}_{n,q,\omega}(i,j)(x) \equiv \begin{cases} \binom{i}{j}_q (x)_{q,\omega}^{i-j}, i \geq j \\ 0, \text{ sonst} \end{cases} \tag{59}$$

Diese Matrix wird in der Formel (71) verwendet.

Satz 3.2. *Die allgemeine Lösung von (58) kann auch geschrieben werden:* $y(t) = \mathrm{E}_{q,\omega}(\mathbf{D}_{n,q}t)y_0$. *Dies ist eigentlich eine endliche Reihe, die sich in der folgenden Form ausdrücken lässt:*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mathbf{D}_{n,q}t)_{q,\omega}^k}{\{k\}_q!} \equiv \mathrm{P}_{n,q,\omega}(t). \tag{60}$$

Der folgende Sonderfall wird häufig verwendet.

Definition 22. Die q,ω-Pascalsche Matrix $\mathrm{P}_{n,q,\omega}$ ist gegeben durch

$$\mathrm{P}_{n,q,\omega}(i,j) \equiv \mathrm{P}_{n,q}(i,j)(1) = \binom{i}{j}_q (1)_{q,\omega}^{i-j}, i,j = 0,\ldots,n-1. \tag{61}$$

Des Weiteren haben wir das folgende q,ω-Analogon von [1, S. 233 (7)], was daraus folgt, dass $\mathrm{P}_{n,q,\omega}(t)$ eine q,ω-Exponentialfunktion ist.

$$\mathrm{P}_{n,q,\omega}(s \oplus_{q,\omega} t) = \mathrm{P}_{n,q,\omega}(s)\mathrm{P}_{n,q,\omega}(t), \quad s,t \in \mathbb{C}. \tag{62}$$

Das impliziert

$$\mathrm{P}_{n,q,\omega}^k = \mathrm{P}_{n,q,\omega}(\overline{k}_{q,\omega}). \tag{63}$$

Durch (62) erhalten wir viele kombinatorische Identitäten. Einige davon sind

$$\sum_{k=j}^{i} \binom{i}{k}_q \binom{k}{j}_q (1)_{q,\omega}^{i-k}[-1]_{q,\omega}^{k-j} = \delta_{i,j} \tag{64}$$

und

$$\sum_{k=j}^{i} \binom{i}{k}_q \binom{k}{j}_q (1)_{q,\omega}^{i-k}(1)_{q,\omega}^{k-j} = (\overline{2_{q,\omega}})^{i-j} \binom{i}{j}_q, \quad i \geq j. \tag{65}$$

3.1. **Multiplikative q, ω-Appellsche Polynommatrizen.**

Definition 23. Ein ω-Analogon von [10, (47)]. Die multiplikativen q, ω-Appell-Polynommatrizen $(\mathcal{M}_{x,q,\omega})$ mit Elementen $\overline{\Phi}^{(M)}_{n,q,\omega}(x)$ der Ordnung $M \in \mathbb{Z}$ sind definiert durch

$$\overline{\Phi}^{(M)}_{n,q,\omega}(x)(i,j) \equiv \binom{i}{j}_q \Phi^{(M)}_{i-j,q,\omega}(x), \; 0 \le i,j \le n-1. \tag{66}$$

Definition 24. Die multiplikativen q, ω-Appell Zahlenmatrizen oder die q, ω-Übertragung-Matrizen $(\mathcal{M}_{q,\omega})$ mit Elementen $\overline{\Phi}^{(M)}_{n,q,\omega}$ der Order $M \in \mathbb{Z}$ sind definiert durch

$$\overline{\Phi}^{(M)}_{n,q,\omega}(i,j) \equiv \overline{\Phi}^{(M)}_{n,q,\omega}(0)(i,j), \; 0 \le i,j \le n-1. \tag{67}$$

Satz 3.3. *Eine Formel für die q, ω-Übertragung-Matrix*

$$\overline{\Phi}_{n,q,\omega} = f_n(t,q,\omega)\mathbf{D}_{n,q}, \tag{68}$$

wobei $f_n(t,q,\omega)$ durch (42) definiert wird.

Beweis. Dies ist ähnlich wie bei der Formel [9, (79)]. □

Satz 3.4. *Der q, ω-Appell-Polynomvektor von x kann als Produkt der q, ω-Appellzahlen-Matrix mal $\xi_{n,q,\omega}(x)$ ausgedrückt werden. Ein q, ω-Analogon von* [2, (3.9), S. 432] *und ein ω-Analogon von* [10, (49)].

$$\phi_{n,q,\omega}(x) = \overline{\Phi}_{n,q,\omega}\xi_{n,q,\omega}(x). \tag{69}$$

Beweis. Dies ist die Formel (45) in Matrixform.

□

Satz 3.5. *Der q, ω-Appell-Polynomvektor von $x \oplus_{q,\omega} y$ kann als Produkt der q, ω-Appellschen Matrix von x mal der q, ω-Appellschen Vektor von y ausgedrückt werden. Ein q, ω-Analogon von* [2, (4.1), S. 436].

$$\phi_{n,q,\omega}(x \oplus_{q,\omega} y) = \overline{\Phi}_{n,q,\omega}(x)\phi_{n,q,\omega}(y). \tag{70}$$

Beweis. Dies ist die Formel (47) in Matrixform. □

Satz 3.6. *Ein q, ω-Analogon von* [2, S. 436].

$$\xi_{n,q,\omega}(x \oplus_q y) = \mathrm{P}_{n,q,\omega}(x)\xi_{n,q,\omega}(y). \tag{71}$$

Beweis. Wir haben durch [12, 2.3]

$$\xi_{n,q,\omega}(x \oplus_q y)(i) = (x \oplus_q y)^i_{q,\omega}$$

(72)
$$= \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k}_q (x)^{i-k}_{q,\omega} (y)^k_{q,\omega} \overset{\text{durch}(59)}{=} (\mathrm{P}_{n,q,\omega}(x)\xi_{n,q,\omega}(y))(i).$$

□

Satz 3.7. *Ein q,ω-Analogon von* [2, S. 436].

$$\overline{\Phi}^{(M+K)}_{n,q,\omega} \xi_{n,q,\omega}(x \oplus_{q,\omega} y) = \overline{\Phi}^{(K)}_{n,q,\omega} \overline{\Phi}^{(M)}_{n,q,\omega}(x)\xi_{n,q,\omega}(y). \tag{73}$$

Beweis. Die beiden Matrizen $\overline{\Phi}^{(M)}_{n,q,\omega}(x)$ und $\overline{\Phi}^{(K)}_{n,q,\omega}$ sind Potenzreihen in $\mathbf{D}_{n,q}$ und wir haben

(74)
$$\overline{\Phi}^{(M)}_{n,q,\omega}(x)\phi^{(K)}_{n,q,\omega}(y)$$
$$\overset{\text{durch}(69)}{=} \overline{\Phi}^{(M)}_{n,q,\omega}(x)\overline{\Phi}^{(K)}_{n,q,\omega}\xi_{n,q,\omega}(y) = \overline{\Phi}^{(K)}_{n,q,\omega}\overline{\Phi}^{(M)}_{n,q,\omega}(x)\xi_{n,q,\omega}(y).$$

Andererseits gemäß der Formel (47) ist dies gleich

$$\phi^{(M+K)}_{n,q,\omega}(x \oplus_{q,\omega} y) \overset{\text{durch}(69)}{=} \overline{\Phi}^{(M+K)}_{n,q,\omega} \xi_{n,q,\omega}(x \oplus_{q,\omega} y). \tag{75}$$

Die Formel (73) folgt, indem die letzten Ausdrücke von (74) und (75) gleichgesetzt werden. □

Bemerkung 4. Die Formel (73) ergibt eine implizite Definition der Funktion $\xi_{n,q,\omega}(x \oplus_{q,\omega} y)$.

Satz 3.8. *Ein ω-Analogon von* [10, (55)]. *Wir gehen davon aus, dass M und K die x-Ordnung bzw. y-Ordnung sind. Die Formel (47) kann in der folgenden Matrixform umgeschrieben werden, wobei $\cdot$ auf der rechten Seite eine Matrixmultiplikation bezeichnet.*

$$\overline{\Phi}^{(M+K)}_{n,q,\omega}(x \oplus_{q,\omega} y) = \overline{\Phi}^{(M)}_{n,q,\omega}(x) \cdot \overline{\Phi}^{(K)}_{n,q,\omega}(y). \tag{76}$$

Beweis. Wir berechnen das Matrixelement (i,j) der Matrixmultiplikation auf der rechten Seite.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=j}^{i}\binom{i}{k}_q \Phi_{i-k,q,\omega}^{(M)}(x)\binom{k}{j}_q \Phi_{k-j,q,\omega}^{(K)}(y)\\
&=\binom{i}{j}_q \sum_{k=j}^{i}\binom{i-j}{k-j}_q \Phi_{i-k,q,\omega}^{(M)}(x)\Phi_{k-j,q,\omega}^{(K)}(y)\\
&=\binom{i}{j}_q \sum_{k=0}^{i-j}\binom{i-j}{k}_q \Phi_{i-j-k,q,\omega}^{(M)}(x)\Phi_{k,q,\omega}^{(K)}(y)\\
&\overset{\text{durch}(47)}{=}\binom{i}{j}_q \Phi_{i-j,q,\omega}^{(M+K)}(x\oplus_{q,\omega} y)=\text{LS}.
\end{aligned}\tag{77}$$

□

Durch die Formel (66) sind die $\overline{\Phi}_{n,q}^{(M)}(x)$-Matrizen mit Matrixelementen q,ω-Appellsche Polynome multipliziert mit q-Binomial-Koeffizienten, und wir gelangen zur nächsten wichtigen Definition.

Definition 25. Ein ω-Analogon von [10, (57)]. Wir definieren die zweite Matrixmultiplikation $\cdot_{q,\omega}$ durch

$$\overline{\Phi}_{n,q,\omega}^{(M)}(x)\cdot_{q,\omega}\overline{\Phi}_{n,q,\omega}^{(K)}(y)\equiv\overline{\Phi}_{n,q,\omega}^{(M+K)}(x\boxplus_{q,\omega} y),\tag{78}$$

wobei $\overline{\Phi}_{n,q,\omega}^{(M+K)}(x\boxplus_q y)$ durch die Formel (49) definiert wird.

Satz 3.9. *Die Menge $(\mathcal{M}_{x,q,\omega},\cdot,\cdot_{q,\omega},\mathrm{I}_n)$ mit Multiplikationen gegeben durch (76) und (78), und Inverse $\overline{\Phi}_{n,q,\omega}^{(-M)}(-x)$ ist eine q,ω-Liesche Gruppe. Das Einheitselement ist die Einheitsmatrix I_n und das assoziative Gesetz gilt wie für Gruppen.*

Wir geben eine vereinfachte Version des entsprechenden Nachweises.

Beweis. $\mathcal{M}_{x,q,\omega}$ ist geschlossen unter den beiden Operationen durch (76) und (78). Durch (78) haben wir

$$\overline{\Phi}_{n,q,\omega}^{(M)}(x)\cdot_q\overline{\Phi}_{n,q,\omega}^{(-M)}(-x)=\overline{\Phi}_{n,q,\omega}^{(0)}(\theta)=\mathrm{I}_n,\tag{79}$$

das die Existenz eines inversen Elements und einer Einheit beweist.

Zur Vereinfachung der Notation wird der letzte Teil in einem Spezialfall angegeben, das leicht zu verallgemeinern ist. Das assoziative Gesetz lautet:

$$(80)\quad \left(\overline{\Phi}^{(M)}_{n,q,\omega}(x)\cdot\overline{\Phi}^{(K)}_{n,q,\omega}(y)\right)\cdot_q\overline{\Phi}^{(J)}_{n,q,\omega}(z)=\overline{\Phi}^{(M)}_{n,q,\omega}(x)\cdot\left(\overline{\Phi}^{(K)}_{n,q,\omega}(y)\cdot_q\overline{\Phi}^{(J)}_{n,q,\omega}(z)\right),$$

das äquivalent zu

$$(81)\qquad \overline{\Phi}^{(M+K+J)}_{n,q,\omega}((x\oplus_{q,\omega}y)\boxplus_{q,\omega}z)=\overline{\Phi}^{(M+K+J)}_{n,q,\omega}(x\oplus_{q,\omega}(y\boxplus_{q,\omega}z))$$

ist. Die Formel (81) folgt jedoch aus der Assoziativität der beiden q,ω-Additionen. □

Sei

$$(82)\qquad \left(\overline{\Phi}^{(M)}_{n,q,\omega}(x)\right)^k\equiv\overline{\Phi}^{(M)}_{n,q,\omega}(x)\cdot\overline{\Phi}^{(M)}_{n,q,\omega}(x)\cdot\cdots\cdot\overline{\Phi}^{(M)}_{n,q,\omega}(x).$$

Dabei steht auf der rechten Seite das Produkt von k gleichen Matrizen $\overline{\Phi}^{(M)}_{n,q}(x)$.

Die Formel (63) kann zu

$$(83)\qquad \left(\overline{\Phi}^{(M)}_{n,q,\omega}(x)\right)^k=\overline{\Phi}^{(kM)}_{n,q,\omega}(\overline{k}_{q,\omega}x)$$

verallgemeinert werden.

3.2. **q,ω-Bernoulli und q,ω-Eulersche Polynome.** Wir betrachten auch die besonderen Fälle q,ω-Bernoulli- und q,ω-Eulersche Polynome.

Definition 26. Es gibt zwei q,ω-Bernoulli-Polynome $\mathrm{B}_{\mathrm{NWA},\nu,q,\omega}(x)$, NWA q,ω-Bernoulli-Polynome, und $\mathrm{B}_{\mathrm{JHC},\nu,q,\omega}(x)$, JHC q,ω-Bernoulli-Polynome. Sie sind definiert durch die beiden erzeugenden Funktionen

$$(84)\qquad \frac{t}{(\mathrm{E}_{q,\omega}(t)-1)}\mathrm{E}_{q,\omega t}(xt)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu\mathrm{B}_{\mathrm{NWA},\nu,q}(x)}{\{\nu\}_q!},\quad |t|<2\pi.$$

und

$$(85)\qquad \frac{t}{(\mathrm{E}_{\frac{1}{q},\omega}(t)-1)}\mathrm{E}_{q,\omega t}(xt)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu\mathrm{B}_{\mathrm{JHC},\nu,q}(x)}{\{\nu\}_q!},\quad |t|<2\pi.$$

Definition 27. Die Ward q,ω-Bernoullischen Zahlen sind gegeben durch

$$(86)\qquad \mathrm{B}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}\equiv\mathrm{B}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}(0).$$

Die Jackson q, ω-Bernoullischen Zahlen sind gegeben durch

$$\mathrm{B}_{\mathrm{JHC},n,q,\omega} \equiv \mathrm{B}_{\mathrm{JHC},n,q,\omega}(0). \tag{87}$$

Um Platz zu sparen, verwenden wir die folgende Abkürzung in den Gleichungen (89) - (93), (96), (97), (100), (104), (105), (108)-(112), (115)-(116), (119)-(120). Für den JHC-Fall ändern wir gegebenenfalls $\oplus_{q,\omega}$ zu $\boxplus_{q,\omega}$.

$$\mathrm{NWA} = \mathrm{NWA} \vee \mathrm{JHC}. \tag{88}$$

Wir werden die folgenden Vektorformen für die q, ω-Bernoulli-Polynome verwenden, die q, ω-Analoga von [1, S. 239] entsprechen.

$$b_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}(x) \equiv (\mathrm{B}_{\mathrm{NWA},0,q,\omega}(x), \mathrm{B}_{\mathrm{NWA},1,q,\omega}(x), \ldots, \mathrm{B}_{\mathrm{NWA},n-1,q,\omega}(x))^T. \tag{89}$$

Die entsprechenden Vektorformen für Zahlen sind

$$b_{\mathrm{NWA},n,q,\omega} \equiv (\mathrm{B}_{\mathrm{NWA},0,q,\omega}, \mathrm{B}_{\mathrm{NWA},1,q,\omega}, \ldots, \mathrm{B}_{\mathrm{NWA},n-1,q,\omega})^T. \tag{90}$$

Wir stellen die NWA und JHC verschobenen, q, ω-Bernoulli-Matrizen vor.

Definition 28. Ein ω-Analogon von [9, (54)].

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}(x) \\ \equiv&(b_{\mathrm{NWA},q,\omega}(x) \quad \mathrm{E}(\oplus_{q,\omega})b_{\mathrm{NWA},q,\omega}(x) \quad \cdots \quad \mathrm{E}(\oplus_{q,\omega})^{\overline{n-1}_{q,\omega}} b_{\mathrm{NWA},q,\omega}(x)), \end{aligned} \tag{91}$$

wobei $\mathrm{E}(\oplus_{q,\omega})^{\overline{k}_{q,\omega}}((x)^n_{q,\omega}) \equiv (x \oplus_{q,\omega} \overline{k}_{q,\omega})^n, \ 0 \leq k \leq n-1.$

Wir benötigen zwei ähnliche Matrizen basierend auf den $\mathrm{B}_{\mathrm{NWA}}$ und $\mathrm{B}_{\mathrm{JHC}}$-Polynomen und Zahlen.

Definition 29. Zwei ω-Analoga von [9, (58),(67)] und zwei q, ω-Analoga von [4, S. 193]. Die NWA und JHC q, ω-Bernoulli-Matrizen sind definiert durch

$$\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}(x)(i,j) \equiv \binom{i}{j}_q \mathrm{B}_{\mathrm{NWA},i-j,q,\omega}(x), 0 \leq i,j \leq n-1. \tag{92}$$

Definition 30. Ein ω-Analogon von [10, 84]. Die NWA und JHC q, ω-Bernoulli-Zahlenmatrizen sind definiert durch

$$\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}(i,j) \equiv \binom{i}{j}_q \mathrm{B}_{\mathrm{NWA},i-j,q,\omega}, 0 \leq i,j \leq n-1. \tag{93}$$

Definition 31. Ein ω-Analogon von [10, 85]. Die Matrix $\mathcal{D}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}$ hat Matrixelemente

$$d_{\mathrm{NWA},i,j} \equiv \begin{cases} \frac{1}{\{i-j+1\}_q}\binom{i}{j}_q (1)_{q,\omega}^{i-j+1} \text{ if } i \geq j, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases} \tag{94}$$

Definition 32. Ein ω-Analogon von [10, 86]. Die Matrix $\mathcal{D}_{\mathrm{JHC},n,q,\omega}$ hat Matrixelemente

$$d_{\mathrm{JHC},i,j} \equiv \begin{cases} \frac{1}{\{i-j+1\}_q}\binom{i}{j}_q [1]_{q,\omega}^{i-j+1} \text{ if } i \geq j, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases} \tag{95}$$

Satz 3.10. *Ein ω-Analogon von* [10, 87]. *Die Inversen der q,ω-Bernoulli-Zahlenmatrizen sind gegeben durch*

$$\left(\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}\right)^{-1} = \mathcal{D}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}, \quad \left(\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{JHC},n,q,\omega}\right)^{-1} = \mathcal{D}_{\mathrm{JHC},n,q,\omega}. \tag{96}$$

Dies impliziert, dass

$$\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}^{-k} = \mathcal{D}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}^{k}. \tag{97}$$

Beweis. Wir betrachten nur den NWA-Fall, für JHC, ändere man zu $[1]_{q,\omega}^{i-j+1}$. Wir zeigen, dass $\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}\mathcal{D}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}$ gleich der Einheitsmatrix ist. Wir wissen, dass

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\{k+1\}_q}\binom{n}{k}_q \mathrm{B}_{\mathrm{NWA},n-k,q,\omega}(1)_{q,\omega}^{k+1} = \delta_{n,0}. \tag{98}$$

Dann haben wir

(99)

$$\begin{aligned} &\sum_{k=j}^{i} \frac{1}{\{k+1-j\}_q}\binom{i}{k}_q \mathrm{B}_{\mathrm{NWA},i-k,q,\omega}\binom{k}{j}_q (1)_{q,\omega}^{k+1-j} \\ &= \binom{i}{j}_q \sum_{k=j}^{i} \frac{1}{\{k+1-j\}_q}\binom{i-j}{k-j}_q \mathrm{B}_{\mathrm{NWA},i-k,q,\omega}(1)_{q,\omega}^{k+1-j} \\ &= \binom{i}{j}_q \sum_{k=0}^{i-j} \frac{1}{\{k+1\}_q}\binom{i-j}{k}_q \mathrm{B}_{\mathrm{NWA},i-j-k,q,\omega}(1)_{q,\omega}^{k+1} \overset{\text{durch}(98)}{=} \binom{i}{j}_q \delta_{i-j,0}. \end{aligned}$$

□

In [9] haben wir die folgenden Formeln betrachtet.

(100) $$\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{NWA},n,q}(x \oplus_q y) = \mathrm{P}_{n,q}(x)\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{NWA},n,q}(y).$$

Diese Formeln können verallgemeinert werden zu

Satz 3.11. *Ein ω-Analogon von* [10, 92].

(101) $$\overline{\Phi}_{n,q,\omega}(x \oplus_{q,\omega} y) = \mathrm{P}_{n,q,\omega}(x)\overline{\Phi}_{n,q,\omega}(y).$$

Insbesondere haben wir

(102) $$\overline{\Phi}_{n,q,\omega}(x) = \mathrm{P}_{n,q,\omega}(x)\overline{\Phi}_{n,q,\omega}.$$

Beweis.

(103)
$$\begin{aligned}
\mathrm{RS} &= \sum_{k=j}^{i} \binom{i}{k}_q (x)_{q,\omega}^{i-k} \binom{k}{j}_q \Phi_{k-j,q,\omega}(y) \\
&= \binom{i}{j}_q \sum_{k=j}^{i} \binom{i-j}{k-j}_q (x)_{q,\omega}^{i-k} \Phi_{k-j,q,\omega}(y) \\
&= \binom{i}{j}_q \sum_{k=0}^{i-j} \binom{i-j}{k}_q (x)_{q,\omega}^{i-j-k}(x)\Phi_{k,q,\omega}(y) \\
&\overset{\text{durch}(43),(47)}{=} \binom{i}{j}_q \Phi_{i-j,q,\omega}(x \oplus_{q,\omega} y) = \mathrm{LS}.
\end{aligned}$$

□

Satz 3.12. *Ein ω-Analogon von* [10, 95]. *Die Inversen der q,ω-Bernoulli-Polynommatrizen sind gegeben durch*

(104)
$$\left(\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}(x)\right)^{-1} = \left(\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}\right)^{-1} \mathrm{P}_{n,q,\omega}(x)^{-1} = \mathfrak{D}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}\mathrm{P}_{n,q,\omega}(x)^{-1}.$$

Wenn die Ordnung erhöht wird, für $y = 0$ in (76), multiplizieren wir die q,ω-Übertragung-Matrix mit $\overline{\Phi}_{n,q,\omega}^{(M)}(x)$. Wenn die Ordnung konstant ist, in (102), multiplizieren wir die q,ω-Übertragung-Matrix mit der q,ω-Pascal-Matrix.

Satz 3.13. *Die Funktionen der q,ω-Bernoulli Polynommatrizen* $(\mathcal{B}_{\mathrm{NWA},q,\omega},\cdot,\cdot_q,\mathrm{I}_n)$ *und* $(\mathcal{B}_{\mathrm{JHC},q,\omega},\cdot,\cdot_q,\mathrm{I}_n)$ *mit Elementen*

$$\overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}(x) \tag{105}$$

sind q,ω-Liesche Untergruppen von $\mathcal{M}_{x,q}$.

Beweis. Die Mengen $\mathcal{B}$ sind geschlossen unter den beiden Operationen durch (76) und (78). Die Existenz von Inversen folgt wie für $\mathcal{M}_{x,q}$.

$\square$

Wir wenden uns nun den q,ω-Euler-Polynomen zu.

Definition 33. Es gibt zwei Arten von q,ω-Euler-Polynomen, $\mathrm{F}_{\mathrm{NWA},\nu,q,\omega}(x)$, NWA q,ω-Euler-Polynomen, und $\mathrm{F}_{\mathrm{JHC},\nu,q,\omega}(x)$, JHC q,ω-Euler-Polynomen. Sie sind definiert durch die folgenden zwei erzeugenden Funktionen:

$$\frac{2\mathrm{E}_{q,\omega t}(xt)}{\mathrm{E}_{q,\omega}(t)+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\{\nu\}_q!}\mathrm{F}_{\mathrm{NWA},\nu,q,\omega}(x), \; |t| < \pi, \tag{106}$$

und

$$\frac{2\mathrm{E}_{q,\omega t}(xt)}{\mathrm{E}_{\frac{1}{q},\omega}(t)+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\{\nu\}_q!}\mathrm{F}_{\mathrm{JHC},\nu,q,\omega}(x), \; |t| < \pi. \tag{107}$$

Definition 34. Wir werden die folgenden Vektorformen für diese Polynome benutzen.

$$f_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}(x) \equiv (\mathrm{F}_{\mathrm{NWA},0,q,\omega}(x), \mathrm{F}_{\mathrm{NWA},1,q,\omega}(x), \ldots, \mathrm{F}_{\mathrm{NWA},n-1,q,\omega}(x))^T. \tag{108}$$

Die entsprechenden q,ω-Euler-Zahlvektoren sind

$$f_{\mathrm{NWA},n,q,\omega} \equiv (\mathrm{F}_{\mathrm{NWA},0,q,\omega}, \mathrm{F}_{\mathrm{NWA},1,q,\omega}, \ldots, \mathrm{F}_{\mathrm{NWA},n-1,q,\omega})^T. \tag{109}$$

Wir stellen die NWA und JHC verschobenen, q,ω-Eulerschen Matrizen vor.

Definition 35. Ein ω-Analogon von [10, 103].

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}(x) \\ &\equiv (f_{\mathrm{NWA},q,\omega}(x) \;\; \mathrm{E}(\oplus_{q,\omega})f_{\mathrm{NWA},q,\omega}(x) \;\; \cdots \;\; \mathrm{E}(\oplus_{q,\omega})^{\overline{n-1}_{q,\omega}}f_{\mathrm{NWA},q,\omega}(x)). \end{aligned} \tag{110}$$

Wir benötigen zwei ähnliche Matrizen, basierend auf den $\mathrm{F}_{\mathrm{NWA}}$-Polynomen.

Definition 36. Die beiden q,ω-Eulerschen Polynommatrizen sind definiert durch

$$\overline{F}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}(x)(i,j) \equiv \binom{i}{j}_q f_{\mathrm{NWA},i-j,q,\omega}(x). \tag{111}$$

Definition 37. Ein ω-Analogon von [10, 105]. Die NWA und JHC q,ω-Eulerschen Matrizen sind definiert durch

$$\overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}(i,j) \equiv \binom{i}{j}_q \mathrm{F}_{\mathrm{NWA},i-j,q,\omega},\, 0 \leq i,j \leq n-1. \tag{112}$$

Definition 38. Ein ω-Analogon von [10, 106]. Die Matrix $\mathcal{C}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}$ hat Matrixelemente

$$c_{\mathrm{NWA},i,j} \equiv \begin{cases} \frac{(1)_{q,\omega}^{i-j+1}+\delta_{i-j,0}}{2}\binom{i}{j}_q & \text{if } i \geq j, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases} \tag{113}$$

Definition 39. Ein ω-Analogon von [10, 107]. Die Matrix $\mathcal{C}_{\mathrm{JHC},n,q,\omega}$ hat Matrixelemente

$$c_{\mathrm{JHC},i,j} \equiv \begin{cases} \frac{[1]_{q,\omega}^{i-j+1}+\delta_{i-j,0}}{2}\binom{i}{j}_q & \text{if } i \geq j, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases} \tag{114}$$

Satz 3.14. *Ein ω-Analogon von* [10, 108]. *Die Inversen der q,ω-Euler-Zahlenmatrizen sind gegeben durch*

$$\left(\overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}\right)^{-1} = \mathcal{C}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}. \tag{115}$$

Dies impliziert, dass

$$\overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}^{-k} = \mathcal{C}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}^{k}. \tag{116}$$

Beweis. Wir betrachten nur den NWA-Fall, für JHC, ändere man zu $[1]_{q,\omega}^{i-j+1}$. Wir zeigen, dass $\overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}\mathcal{C}_{\mathrm{NWA},n,q,\omega}$ gleich der Einheitsmatrix ist. Wir wissen, dass

$$\sum_{k=0}^{n}(1)_{q,\omega}^{k}\binom{n}{k}_q \mathrm{F}_{\mathrm{NWA},n-k,q} + \mathrm{F}_{\mathrm{NWA},n,q} = 2\delta_{n,0}. \tag{117}$$

Man führe eine Funktion $G(k)$ ein. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=j}^{i} \binom{i}{k}_q \mathrm{F}_{\mathrm{NWA},i-k,q,\omega} G(k-j) \binom{k}{j}_q \\
(118) \qquad &= \binom{i}{j}_q \sum_{k=j}^{i} \binom{i-j}{k-j}_q \mathrm{F}_{\mathrm{NWA},i-k,q,\omega} G(k-j) \\
&= \binom{i}{j}_q \sum_{k=0}^{i-j} \binom{i-j}{k}_q \mathrm{F}_{\mathrm{NWA},i-j-k,q,\omega} G(k) \overset{\text{durch}(117)}{=} \binom{i}{j}_q \delta_{i-j,0}.
\end{aligned}$$

Es ist jetzt offensichtlich, dass $G(k) = \frac{1}{2}\left[(1)_{q,\omega}^{k} + \delta_{k,0}\right]$ diese Gleichung für NWA löst, und dass der JHC-Fall ähnlich gelöst wird. □

Die letzten beiden Sätze werden auf ähnliche Weise belegt.

Satz 3.15. *Die Inversen der q,ω-Eulerschen Polynommatrizen sind gegeben durch*

$$(119) \quad \left(\overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{NWA},n,q}(x)\right)^{-1} = \left(\overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{NWA},n,q}\right)^{-1} \mathrm{P}_{n,q,\omega}(x)^{-1} = \mathcal{C}_{\mathrm{NWA},n,q} \mathrm{P}_{n,q,\omega}(x)^{-1}.$$

Satz 3.16. *Ein ω-Analogon von* [10, 114]. *Die q,ω-Eulerschen Polynommatrizen $(\mathcal{F}_{\mathrm{NWA},q}, \cdot, \cdot_q, \mathrm{I}_n)$ und $(\mathcal{F}_{\mathrm{JHC},q}, \cdot, \cdot_q, \mathrm{I}_n)$ mit Elementen*

$$(120) \qquad \overline{\overline{\mathrm{F}}}_{\mathrm{NWA},n,q}(x)$$

sind q,ω-Lieschen Untergruppen von $\mathcal{M}_{x,q}$.

4. Schlussfolgerung

Wir haben Formeln aus Arbeiten von Arponen [4], Aceto et al. [2], Ernst [8], [9], [10], vereinigt und q,ω-deformiert, um eine erste Synthese von q,ω-Appell-Polynommatrizen vorzustellen. Einige Formeln für q-Pascal -Matrizen sowie Formeln für q-Bernoulli- und q-Eulerschen Matrizen werden verallgemeinert. Wir haben die ersten konkreten Beispiele von q,ω-Lieschen Untergruppen angegeben. Wir glauben, dass es keine weitere Analoga gibt, die q,ω-Analoga sind trotzdem sehr interessant.

Literatur

[1] L. Aceto, D. Trigiante, The matrices of Pascal and other greats. *Amer. Math. Monthly* 108 no. 3, 232–245 (2001)

[2] L. Aceto, H.R. Malonek and G. Tomaz, A unified matrix approach to the representation of Appell polynomials, *Integral Transforms Spec. Funct.* 26 no. 6 , 426–441 (2015)

[3] M. H. Annaby, A. E. Hamza, K. A. Aldwoah, Hahn difference operator and associated Jackson-Nørlund integrals. *J. Optim. Theory Appl. 154, No. 1, 133-153 (2012)*

[4] T. Arponen, A matrix approach to polynomials, Linear Algebra Appl. 359, 181–196 (2003)

[5] T.Ernst, *A comprehensive treatment of q-calculus,* Birkhäuser (2012)

[6] T.Ernst, An umbral approach to find q-analogues of matrix formulas. *Linear Algebra Appl.* **439**, 1167–1182 (2013)

[7] T.Ernst, Faktorisierungen von q-Pascalmatrizen (Factorizations of q-Pascal matrices). *Algebras Groups Geom. 31 no. 4, ,387-405 (2014)*

[8] T.Ernst, On the q-exponential of matrix q-Lie algebras. Spec. Matrices 5, 36-50 (2017)

[9] T.Ernst, On several q-special matrices, including the q-Bernoulli and q-Euler matrices. *Linear Algebra Appl. 542 , 422-440 (2018)*

[10] T.Ernst, On the q-Lie group of q-Appell polynomial matrices and related factorizations Spec. Matrices 6, 93-109 (2018)

[11] W.Hahn, Über Polynome, die gleichzeitig zwei verschiedenen Orthogonalsystemen angehören. (German) *Math. Nachr. 2, 263-278 (1949)*

[12] W. P. Johnson, q-extension of identities of Abel-Rothe type. Discrete Math. 159, No. 1-3, 161-177 (1996)

[13] S. Varma, B. Yasar, M. Özarslan, Hahn-Appell polynomials and their d-orthogonality *Revista de la Real Academia de Ciencias Ex* (2018)

ALGEBRAS GROUPS AND GEOMETRIES 35 267 -282 (2018)
DOI 10.29083/AGG.35.03.2018

(ε, δ)-FREUDENTHAL KANTOR TRIPLE SYSTEMS, δ-STRUCTURABLE ALGEBRAS AND LIE SUPERALGEBRAS

Noriaki Kamiya[1]
Center for Mathematical Sciences, University of Aizu
965-8580, Aizuwakamatsu, Japan
kamiya@u-aizu.ac.jp
Daniel Mondoc
Centre for Mathematical Sciences, Lund University
22 100 Lund, Sweden
daniel.mondoc@math.lu.se
Susumu Okubo[2]
Department of Physics, University of Rochester
Rochester, NY 14627
okubo@pas.rochester.edu

Received November 7, 2019

Abstract

In this paper we discuss (ε,δ)-Freudenthal Kantor triple systems with certain structure on the subspace L_{-2} of the corresponding standard embedding five graded Lie (super)algebra $L(\varepsilon,\delta) := L_{-2}\oplus L_{-1}\oplus L_0\oplus L_1\oplus L_2$, $[L_i,L_j]\subseteq L_{i+j}$. We recall Lie and Jordan structures associated with (ε,δ)-Freudenthal Kantor triple systems ([26], [27]) and the give results for unitary and pseudo-unitary (ε,δ)-Freudenthal Kantor triple systems. Further, we give the notion of δ-structurable algebras and connect them to $(-1,\delta)$-Freudenthal Kantor triple systems and the corresponding Lie (super)algebra construction.

AMS 2000 Mathematics subject classification: Primary 17A40; 17B60

Keywords: Lie superalgebras; triple systems.

[1]Research partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (No. 19540042 (C),(2)), Japan Society for the Promotion of Science.
[2]Research supported by U.S. Department of Energy Grant No. DE-FG02-91ER40685.